数理解析研究所講究録
1049巻 1998年 157-161

Spreading Blaschke products and homeomorphic parts

新潟大・理 泉池敬司 (Keiji Izuchi)

Dを単位開円板とし，その上の有界解析関数よりなるバナッハ環をH^∞とする。その maximal ideal space $\mathfrak{M}$ は weak*-top. で compact Hausdorff 空間である。H^∞の関数とその Gelfand 変換を同一視することによって，H^∞は$C(\mathfrak{M})$の closed subalg. と考えることができる。コロナ定理より$D\subset\mathfrak{M}$は dense である。$f\in H^\infty$に対して，

$$Z(f)=\{x\in\mathfrak{M}\setminus D\,;\ f(x)=0\},\quad \{|f|<1\}=\{x\in\mathfrak{M}\setminus D\,;\ |f(x)|<1\}$$

とする。$x,y\in\mathfrak{M}$に対して

$$\rho(x,y)=\sup\{|f(y)|\,;\ f\in H^\infty,\ \|f\|_\infty\le 1,\ f(x)=0\}$$

とする。

$$P(x)=\{z\in\mathfrak{M}\,;\ \rho(x,z)<1\}$$

をxの Gleason part と呼ぶ。$P(x)\neq\{x\}$の時，nontrivial と呼ばれ，Hoffman [4] より $\exists L_x : D\to P(x)$ continuous, 1対1, onto map s.t. $f\circ L_x\in H^\infty$ $\forall f\in H^\infty$である。L_xが

homeomorphic になる時, $P(x)$ を homeomorphic part という。

$\{z_n\}_n \subset D$ を $\sum 1-|z_n| < \infty$ とする。特に $H^\infty|_{\{z_n\}_n} \cong \ell^\infty$ の時 interpolating, そして

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad z \in D$$

を IBP (interpolating Blaschke product) という。この時, Carleson [1] により,

$$(1-|z_n|^2)\,|b'(z_n)| \geq \delta > 0 \quad \forall n$$

と同値である。Hofman [ ] によると,

$$P(x) \neq \{x\} \iff \exists\, b : \mathrm{IBP} \text{ s.t. } x \in Z(b)$$

である。

$$\lim_{n\to\infty} (1-|z_n|^2)\,|b'(z_n)| = 1$$

の時, b を sparse と呼び この時

$$(b \circ L_x)(z) = \lambda z, \quad z \in D, \quad |\lambda| = 1$$

となることが知られており, $P(x)$, $x \in Z(b)$, を sparse part と呼ぶ。当然この時, $P(x)$ は homeo. part である。

$P(x)$ が nontrivial で

$$\exists\, b : \mathrm{IBP} \text{ s.t. } (b \circ L_x)(z) = \lambda z, \quad z \in D, \quad |\lambda| = 1$$

となる時, $P(x)$ を locally sparse part という。この part は Gorkin, Lingenberg, Mortini [2] の中で詳しく調べられている。そして locally sparse でない homeomorphic part が存在するかという問題を提出している。これに対して, 田中氏が

[6]の研究を通して，その存在を指摘している。ここではどのようなIBPはその零点の中にlocally sparseでないhomeo. partを決定するものがあるかについて述べる。

φ, ψ を $\{z_n\}_n, \{w_n\}_n$ を零点とするBlaschke productとする。

$$d(\varphi, \psi) = \inf\{\rho(z_n, w_k);\ n, k = 1, 2, \cdots\},$$

$$\delta_0(\varphi) = \liminf_{n\to\infty} \min_{k\neq n} \rho(z_n, z_k)$$

とする。

まず田中氏のideaを使うと次の定理が得られる。

定理1. b_n をinfinite IBPでかつ $b = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$ もIBPとする。

a) $d\left(\prod_{k=1}^{n} b_k, \prod_{k=n+1}^{\infty} b_k\right) \to 1$ as $n \to \infty$,

b) $\delta_0\left(\prod_{k=n+1}^{\infty} b_k\right) \to 1$ as $n \to \infty$,

c) $\{|b_n| < 1\} \supset \{|\prod_{k=n+1}^{\infty} b_k| < 1\}$ $\forall n$

とする。この時，$\exists x_0 \in Z(b)$ s.t. $P(x_0)$ はhomeomorphic partでnon locally sparse。

注）上の条件をみたす b は存在する。

略証。 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z\left(\prod_{k=n}^{\infty} b_k\right)$

とする。$x \in E$ に対してその表現measure μ_x の台 $\mathrm{supp}\,\mu_x$ の包含関係によってEにorderを導入できる。E_m でminimalな点の

集合とする。$\forall x_0 \in E_m$ に対して，$P(x_0)$ は non sparse な homeo. part であることが証明できる。([3]参照)

IBP b の零点列 $\{z_n\}_n$ が

$$\delta_0(b) = \liminf_{n\to\infty} \min_{k\neq n} \rho(z_n, z_k) = 1$$

となる時，spreading と呼ぼう。sparse は spreading であり，sparse でない spreading が存在する。

定理2. b を spreading であるが non sparse である IBP とする。その時，$\exists x_0 \in Z(b)$ s.t. $P(x_0)$ は homeomorphic であるが non locally spare である。

略証。[2] より $\forall x \in Z(b)$ に対して，$P(x)$ は homeomorphic part になることが分かる。$\varphi_0 \equiv b$ とする。$Z(\varphi_0)_m$ の中に locally sparse でない点があれば証明が終る(ストップする)。そこで $\forall x \in Z(\varphi_0)_m$ に対して，$P(x)$ は locally spare とする。この時，次をみたす分解 $\varphi_0 = \varphi_1 b_1$ が存在する。

i) φ_1, b_1 は non sparse,

ii) $\{|\varphi_1|<1\} < \{|b_1|<1\}$。

次に φ_1 に対して同じ議論をする。途中でストップしたら証明が終る。無限に続いたとする。

$$\varphi_{n-1} = \varphi_n b_n$$

$$\{|\varphi_n|<1\} \subset \{|b_n|<1\}$$

となる non sparse の列 $\{\varphi_n\}$, $\{b_n\}$ が取れる。

$$b_0 = \prod_{k=1}^{\infty} b_k$$

とする。すると定理1が適用できて、$Z(b_0)$ の中に locally sparse でない homeo となる点が存在する。当然 $Z(b_0) \subset Z(b)$ である。

参考文献

[1] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math. 80 (1958), 921-930.

[2] P. Gorkin, H.-M. Lingenberg and R. Mortini, Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞, Ind. Univ. Math. J. 39 (1990), 961-983.

[3] C. Guillory and K. Izuchi, Maximal Douglas subalgebras and minimal support points, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 477-481.

[4] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. of Math. (2) 86 (1967), 74-111.

[5] K. Izuchi, Spreading Blaschke products and homeomorphic parts, Complex Variables, to appear.

[6] J. Tanaka, Flows in fibers, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 779-804.